ΛΥΣΕΙΣ

ΙΟΥΝΙΟΣ 2008

ΘΕΜΑ 1ο

α.

$$\bar{x} = \frac{8+14+20+12+16}{5} = \frac{70}{5} = 14$$

β.

Οι τιμές σε αύξουσα σειρά είναι 8, 12, 14, 16, 20

Διάμεσος είναι η τρίτη παρατήρηση, άρα δ = 14

γ.

$$S^2 = \frac{(8-14)^2+(12-14)^2+(14-14)^2+(16-14)^2+(20-14)^2}{5} =$$

$$= \frac{36+4+0+4+36}{5} = \frac{80}{5} = 16, \quad \text{άρα} \quad S = \sqrt{16} = 4$$

δ.

Το εύρος R είναι ίσο με R = μέγιστη παρατήρηση – ελάχιστη παρατήρηση =

= 20 – 8=12

ε.

$$CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{4}{14} \approx 0{,}28 = 28\%$$

Επειδή 28% >10%, το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

ΘΕΜΑ 2ο

α.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x}-1}{\lambda(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\lambda(x-1)(\sqrt{x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{\lambda(x-1)(\sqrt{x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\lambda(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2\lambda}$$

β.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{3x-1} = \frac{1}{2}$$

γ.

Θα πρέπει να ισχύει $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \iff \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2\lambda}=\frac{1}{2}$$
$$\lambda = 1$$

ΘΕΜΑ 3ο

α.

$f'(x) = \lambda\, e^{\lambda x}$ και $f''(x) = \lambda^2\, e^{\lambda x}$

β.

$f''(x) - f'(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 e^{\lambda x} - \lambda e^{\lambda x} - 2 e^{\lambda x} = 0 \Leftrightarrow$

$e^{\lambda x}(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0$ και επειδή $e^{\lambda x} \neq 0$

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

$\lambda = -1$ ή $\lambda = 2$

γ. i)

Όταν $\lambda = 2$, έχουμε $f(x) = e^{2x}$ και $f'(x) = 2\, e^{2x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

γ. ii)

Όταν $\lambda = -1$, έχουμε $f(x) = e^{-x}$ και $f'(x) = -e^{-x} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.

ΘΕΜΑ 4ο

α.

$f'(x) = x^2 - 4x + 3$

β.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 3$

Πρόσημο της f' και η μονοτονία της f

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f′		+	0	−	0	+	
f		↗	|	↘	|	↗	

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η συνάρτηση f :
Είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[3, +\infty)$
Είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, 3]$

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = 1$, το $f(1) = \dfrac{6028}{3}$

Και τοπικό ελάχιστο για $x = 3$ το $f(3) = 2008$

γ.

Για κάθε $x \in [1, +\infty)$ η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 3$.
Οπότε θα είναι $f(x) \geq f(3) \Leftrightarrow f(x) \geq 2008$